数理解析研究所講究録
233巻 1975年 35-39

群指標の行列式とその応用

北大　吉田知行

以下Gは常にある有限群を表わす。Gの（$\mathbb{C}$上の）表現ρの行列式（determinant）det ρは合成

$$\det \rho : G \xrightarrow{\rho} GL \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^*$$

によって定義される。χがρの指標のとき，$\det \chi = \det \rho$とおいて指標χの行列式（determinant）を定義する。この概念は transfer theorems や 2-fusion に関する結果の証明などに有効である。実はこの方法は $Z_p \wr Z_p$-free な Sylow p-群を持つ群に関する Wielandt の定理をもっとわかりやすく証明するために開発されたものである。ここではこの概念を用いたいくつかの非常に特別な例について述べる。

補題1．tをGの involution，χをGの一般指標とする。もし$t \in G'$なら，$\chi(1) \equiv \chi(t) \pmod 4$。

証明．χは指標としてよい。ρをχを指標として持つGの

表現とする．このとき行列 $\rho(t)$ の固有値は 1 または -1 で，それぞれの重複度を a, b とすれば $\chi(t)=\mathrm{tr}\,\rho(t)=a-b$，$\chi(1)=a+b$．$t\in G'$ だから，$\rho(t)\in SL$．よって $\det\rho(t)=(-1)^b=1$．よって b は偶数．これより $\chi(1)-\chi(t)=2b\equiv 0 \pmod 4$．

__補題2__．α を G の部分群 H の一般指標とする．$x\in G$ なら $x^G\cap H=x_1^H+\cdots+x_n^H$ $(x_1,\cdots,x_n\in H)$ となる．このとき，

$$\alpha^G(x)=\sum_i\left|\frac{C_G(x_i)}{C_H(x_i)}\right|\alpha(x_i)=\frac{|C_G(x)|}{|H|}\sum_i|x_i^H|\,\alpha(x_i).$$

証明は容易である．さて補題1，2を組み合わせて次の定理が得られる．

__定理3__．$K\trianglelefteq H\leq G$ で H/K は巡回群とする．t を G の involution とする．$t^G\cap K=t_1^H+\cdots$，$t^G\cap(H-K)=t_1'^H+\cdots$ となる $t_1,\cdots,t_1',\cdots\in H$ をとる．さらに

$$s^+=\sum_i\left|\frac{C_G(t_i)}{C_H(t_i)}\right|,\quad s^-=\sum_j\left|\frac{C_G(t_j')}{C_H(t_j')}\right|$$

とおく．このとき，もし $t\in G'$ なら，

$$|G:H|\equiv s^+ + s^-\equiv s^+-s^- \pmod 4),$$
$$|G:H|\equiv s^+ \pmod 2),\quad s^-\equiv 0 \pmod 2).$$

証明．λ を H の線型指標で $\mathrm{Ker}\,\lambda \supseteq K$ なるものとする．補題2によって，

$$\lambda^G(t) = \Delta^+ + \varepsilon \Delta^-,$$

ここで ε は $\mathrm{Ker}\,\lambda = K$ のとき -1，$\mathrm{Ker}\,\lambda \neq K$ のとき $+1$ とする．

補題1により $|G:H| = \lambda^G(1) \equiv \lambda^G(t) = \Delta^+ + \varepsilon\Delta^- \pmod 4$．

$K = H$ なら，$\lambda = 1_H$ とすれば定理は正しい．$K \neq H$ なら，$\varepsilon = -1$ となる λ があるから，$\Delta^+ - \Delta^- \equiv |G:H| \pmod 4$．また，$\lambda = 1_H$ とすれば $\Delta^+ + \Delta^- \equiv |G:H| \pmod 4$．定理は証明された．

定理における Δ^+ と Δ^- は明らかに，それぞれ，

$$\frac{|C_G(t)|}{|H|}\,|t^G \cap K|, \quad \frac{|C_G(t)|}{|H|}\,|t^G \cap (H-K)|$$

に等しい．$|G:H|$ の場合，定理によって Δ^+ は奇数，したがって $t^G \cap K \neq \phi$．これは Thompson の fusion lemma である．この定理は t の位数が2より大きい場合にも一般化できる．

次に $H \le G$ と $\lambda \in \hat{H}$ に対し $T_H^G(\lambda) = \det(\lambda^G - 1_H^G)$ とおく．
$(T^G(\lambda))$

<u>補題4</u>．$K \le H \le G$ とする．

(i) $T_H^G : \hat{H} \longrightarrow \hat{G}$ は準同型．

(ii) $\lambda \in \hat{G}$ なら $T_H^G(\lambda_{|H}) = \lambda^{|G:H|}$．

(iii) $\lambda \in \hat{K}$ なら $T_H^G(T_K^H(\lambda)) = T_K^G(\lambda)$, i.e. $T_H^G \circ T_K^H = T_K^G$.

<u>補題5.</u> (Mackey 分解). $K, H \le G$, $G = \sum_i H g_i K$, $K_i = K \cap H^{g_i}$, $\lambda \in \hat{H}$ に対し $\lambda_i = \lambda^{g_i}{}_{|K_i} \in \hat{K_i}$ とおく. このとき

$$T_H^G(\lambda)_{|K} = \prod_i T_{K_i}^K(\lambda_i).$$

<u>補題6.</u> P を p-群, A を P の指数 p の可換群, $\lambda \in \hat{A}$ とする. $\tau = T^P(\lambda)$ とおく. このとき

(i) $\mathrm{Ker}\,\tau \supseteq \Omega_1 Z_{p-1}(P)$.

(ii) $y \in A$, $\lambda(y) \ne 1$, $\mathrm{Ker}\,\lambda \supseteq \langle y^{p^i x} \mid x \in P, i \ge 1 \rangle$ と仮定する. さらに P が $Z_p \wr Z_p$-free なら $\tau(y) = 1$.

これらの補題は誘導指標の定義などから得られる. これによって, いくつかの transfer 定理を証明できる. 例えば P を $Z_p \wr Z_p$-free な Sylow p-群, $N = N_G(P)$, $\lambda \in \hat{N}$, $T^G(\lambda) = 1$ とする. $\lambda_{|P} \ne 1$ と仮定して矛盾を導びく. $G = \sum_i N g_i P$, $P_i = P \cap N^{g_i}$, y を $\lambda(y) \ne 1$ となる位数最小の P の元とすると, 補題5により $1 = T^G(\lambda)_{|P} = \lambda_{|P} \prod_{i>1} T^P(\lambda_i)$ (ここで $g_1 = 1$ にとり, $\lambda_i = \lambda^{g_i}{}_{|P_i}$ とおいた). $\lambda(y) \ne 1$ よりある $i > 1$ に対し $T^P(\lambda_i)(y) \ne 1$. $P_i \subseteq M \underset{p}{\trianglelefteq} P$ となる M をとり $\mu = T^M(\lambda_i)$ とおけば仮定と補題

6によって$T^P(\mu)(x)=1$が示される。しかし$T^P(\mu)(x)=T^P(\lambda)(x)$ $\neq 1$、矛盾。よって$\lambda\in\widehat{N}$で$T^G(\lambda)=1$なら$\lambda_{|P}=1$。これから$\lambda\in\widehat{N}$に対し$T^G(\lambda)_{|P}=\lambda_{|P}{}^{|G:N|}$が証明できる。したがって、$P\cap G'$は$N$の任意の線型指標の核に含まれ、$P\cap G'$ $=P\cap N'$となる。これはWielandtの定理である。

定義. $\mathfrak{S}\leq H\leq G$とする。次が成立するとき$\mathfrak{S}$はHにおいて$\underline{\text{Sylow型}}$であるという：

$$\mathfrak{S}^g\subseteq H,\ g\in G \Longrightarrow \mathfrak{S}^g\sim\mathfrak{S}\ \text{in}\ H.$$

定理7. $\mathfrak{S}$が$H\leq G$においてSylow型で$N_G(\mathfrak{S})\subseteq H$とする。このとき、$\Omega_1 Z_{p-1}(\mathfrak{S})\cap G'=\Omega_1 Z_{p-1}(\mathfrak{S})\cap H'$。さらに$\mathfrak{S}$が$Z_p \wr Z_p$-freeなら、$\mathfrak{S}\cap G^pG'=\mathfrak{S}\cap H^pH'$。

この定理の証明は補題6.(i)による。